SEM. II, DSC

vector analysis

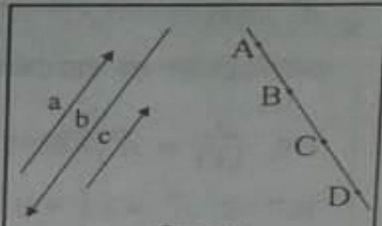
Mr. Soumya Das
Dept. of physics, Bhatter College

Lecture-I

2.3. ভেক্টর সম্বন্ধে কয়েকটি জ্ঞাতব্য বিষয় (Some facts about vectors) :

(i) একরেখীয় ভেক্টর (Collinear vectors) :

একাধিক সমান্তরাল ভেক্টর অথবা একই রেখার উপর অবস্থিত একাধিক ভেক্টরকে একরেখীয় ভেক্টর বলে। 2.3 নং চিত্রে **a, b, c,** তিনটি একরেখীয় ভেক্টর।



চিত্র 2.3

আবার, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ এবং $\overrightarrow{CB}$ — এরাও একরেখীয় ভেক্টর। চিত্র হতে বোঝা যায় একরেখীয় ভেক্টর সমমুখী অথবা বিপরীতমুখী হতে পারে। **a** এবং **c** ভেক্টরদ্বয় সমমুখী কিন্তু **a** এবং **b** অথবা **b** এবং **c** ভেক্টরদ্বয় বিপরীতমুখী। তেমনি $\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের অভিমুখ এক কিন্তু $\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{CB}$ ভেক্টরদ্বয়ের অভিমুখ বিপরীত।

আবার, দুটি একরেখীয় ভেক্টরের অভিমুখ এক হলে, অনেক সময় তাদের সমভেক্টর (like vectors) বলা হয়। $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুটি সমভেক্টর হলে, $\vec{B} = k\vec{A}$ যেখানে k এমন একটি স্কেলার রাশি যার মান সমভেক্টরদ্বয়ের মডিউলাসের অনুপাতের সমান অর্থাৎ $k = \dfrac{|\vec{B}|}{|\vec{A}|}$

(ii) অকার্যকর এবং একক ভেক্টর (Null and unit vectors) :

কোনো রেখাংশের আদিবিন্দু A এবং শেষ বিন্দু B যদি মিশে যায় তবে রেখাংশটি বিন্দুতে পরিণত হয় এবং তার কোনো দিক্ থাকে না। কিন্তু ভেক্টর বীজগণিতের সাধারণ নিয়ম রক্ষার জন্য ঐ রকম দুটি মিশে যাওয়া বিন্দুকেও একটি ভেক্টর রূপে গণ্য করা হয় এবং বলা হয় অকার্যকর ভেক্টর। অকার্যকর ভেক্টরকে যে-কোনো ভেক্টরের সঙ্গে একরেখীয় মনে করা যেতে পারে। অকার্যকর ভেক্টরকে $\vec{0}$ (শূন্য) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। বলা বাহুল্য, অকার্যকর ভেক্টর ছাড়া অন্যান্য সকল ভেক্টরই কার্যকর ভেক্টর (proper vectors)।

অকার্যকর ভেক্টরের ধর্মাবলি (Properties of null vector) :

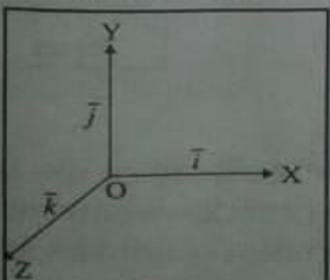
(i) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$; অর্থাৎ কোনো ভেক্টর $\vec{a}$-এর সঙ্গে অকার্যকর ভেক্টর যোগ দিলে, আমরা $\vec{a}$ ভেক্টর পাই।

(ii) $\vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$; কোনো ভেক্টর $\vec{a}$ থেকে অকার্যকর ভেক্টর বিয়োগ করলে $\vec{a}$ ভেক্টর পাই।

(iii) $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$; অকার্যকর ভেক্টরকে কোনো স্কেলার রাশি (শূন্য ছাড়া) দ্বারা গুণ করলে গুণফল অকার্যকর ভেক্টরের সমান হয়।

(iv) $0\,(\vec{a}) = \vec{0}$; কোনো ভেক্টরকে শূন্য দ্বারা গুণ করলে গুণফল অকার্যকর ভেক্টরের সমান হয়।

একক মানের ভেক্টরকে বলা হয় একক ভেক্টর। একক ভেক্টরের প্রয়োজন হয় দিক্ নির্দেশের জন্য। যে প্রতীক চিহ্ন দ্বারা $\vec{A}$ ভেক্টরের অভিমুখে একক ভেক্টরকে প্রকাশ করা হয় সেটি $\hat{a}$ যেমন, $\vec{A} = \hat{a}\cdot A$



চিত্র 2.4

(iii) অর্থগোনাল একক ভেক্টর বা বেস্ ভেক্টর (Orthogonal unit vector or base vector):

ধর, ত্রিদেশীয় দক্ষিণ-মুখী নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু O। X, Y এবং Z-অক্ষ অভিমুখে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\bar{i}$, $\bar{j}$ এবং $\bar{k}$ [2.4 নং চিত্র] ।

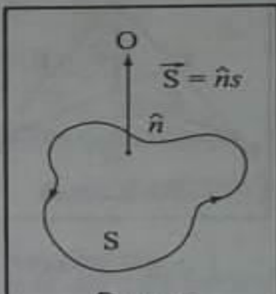
এই একক ভেক্টরগুলিকে বলা হয় অর্থগোনাল একক ভেক্টর বা বেস্ ভেক্টর। যে-কোনো অক্ষ বরাবর কোনো ভেক্টর হবে ঐ অক্ষ বরাবর একক ভেক্টরের গুণিতক (multiple)। তিন অক্ষ বরাবর কোনো ভেক্টর $\vec{A}$-এর উপাংশ যথাক্রমে $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$ এবং $\vec{A}_z$ হলে,

সাধারণত তড়িতাধান কুলম্ব এককে এবং চৌম্বক ক্ষেত্র টেসলা এককে প্রকাশ করা হয়। তড়িতাধানযুক্ত কণাটি চৌম্বক ক্ষেত্রে বৃত্তাকার পথে ঘুরে যাবে।

(iii) ক্ষেত্রফল ভেক্টর (Area vector) :

2.12 অনুচ্ছেদে দেখেছি যে $\vec{A} \times \vec{B}$ এমন একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল বোঝায় যে সামান্তরিকের θ কোণে আনত দুই সন্নিহিত বাহু ভেক্টর $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ প্রকাশ করে। ভেক্টর গুণন $\vec{A} \times \vec{B}$ দ্বারা প্রকাশিত ক্ষেত্রফলের কোনো আকার (shape) বলা না থাকায় $AB \sin\theta$ মানের যে-কোনো ক্ষেত্রফল $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের তলের অভিলম্ব (অর্থাৎ একক অভিলম্ব ভেক্টর $\hat{n}$) ভেক্টর গুণফল প্রকাশ করবে। সুতরাং ক্ষেত্রফল একটি ভেক্টর রাশি।

2.25 নং চিত্রে প্রদর্শিত একটি ক্ষুদ্র সমতল ক্ষেত্র S বিবেচনা কর। এই ক্ষেত্রের মান ও অভিমুখ দুইই আছে। এর মান ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বুঝায় এবং ক্ষেত্রের অভিমুখ তলের লম্ব বরাবর নেওয়া হয়। অর্থাৎ $\vec{S} = \hat{n}S$। ভেক্টর ক্ষেত্রফলের চিহ্ন কি হবে তা নির্ভর করে কোন বহির্বিন্দু O হতে দেখলে কিভাবে ক্ষেত্র আঁকা হল তার উপর। 2.25 নং চিত্রে O বিন্দু হতে দেখলে ক্ষেত্রটি আঁকা হয়েছে বামাবর্তী। এ অবস্থায় একক ভেক্টর $\vec{n}$ অভিমুখে ক্ষেত্রফল ভেক্টর হবে ধনাত্মক (positive)। যদি ক্ষেত্রটি দক্ষিণাবর্তী আঁকা হয়, তবে ক্ষেত্রফল ভেক্টর হবে ঋণাত্মক (negative)।



চিত্র 2.25

কোনো ক্ষেত্রফল ভেক্টরের x উপাংশ বলতে x-অক্ষের অভিলম্ব তলে (অর্থাৎ y-z তলে) তার প্রক্ষেপ (projection) বুঝায়। dS ক্ষেত্র ভেক্টর হলে, তার x-উপাংশ $dS_x\ (= dy.dz)$ লেখা যায়। অন্য দুটি উপাংশ dS_y এবং dS_z সম্বন্ধে অনুরূপ সংজ্ঞা প্রযোজ্য।

একথা মনে রাখা দরকার যে ক্ষেত্র-ভেক্টর ভেক্টর সংক্রান্ত সকল সূত্র মেনে চলে।

Examples :

(1) দেখাও যে ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং ভেক্টর $\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পরের অভিলম্ব। [N.B.U. 1983]

উঃ আমরা জানি, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ [θ = ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ]

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$$

এখন, $\vec{A}\ \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = (1)(4) + (4)(2) + (3)(-4)$

$$= 12 - 12 = 0$$

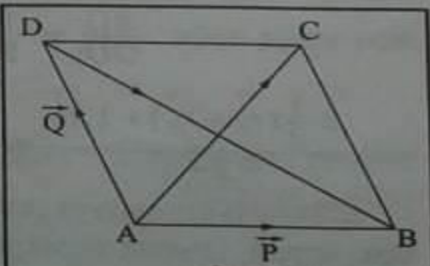
$\therefore \cos\theta = 0$ অথবা $\theta = \pi/2$.

এটা প্রমাণ করে যে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের অভিলম্ব।

[ভেক্টর $\vec{A}$ এবং ভেক্টর $\vec{B}$-এর স্কেলার গুণফল শূন্য প্রমাণিত হলে ভেক্টরদ্বয়কে পরস্পরের লম্ব বলা যায়।]

(2) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে একটি রম্বসের দুটি কর্ণ পরস্পরের সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থান করে।

উঃ 2.26 নং চিত্রে, ধর রম্বসের AB বাহু ভেক্টর $\vec{P}$ এবং AD বাহু ভেক্টর $\vec{Q}$-কে সর্বতোভাবে প্রকাশ করে। $ABCD$ একটি রম্বস হওয়ায় $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$ [রম্বসের বাহুগুলি সব সমান]



চিত্র 2.26

(5) (i) $\vec{A}=3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\vec{B}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্নিহিত কোণের মান নির্ণয় করো [C.U. 2000, '05

উঃ আমরা জানি $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$, অতএব $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{A.B}$

এখন, $A = \sqrt{(3)^2+(2)^2+(-6)^2} = \sqrt{49} = 7$

এবং $B = \sqrt{(4)^2+(-3)^2+(1)^2} = \sqrt{26}$

আবার, $\vec{A}.\vec{B} = (3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}).(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$
$= (3)(4)+(2)(-3)+(-6)(1)$
$= 12-6-6 = 0$

$\because \cos\theta = \dfrac{0}{7\times\sqrt{26}} = 0 \quad \therefore \theta = \pi/2.$

(ii) $\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{B}=-\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় কর। [C.U. 2008]

উঃ 5(i) নং অংক দেখ।

(6) $\vec{\delta}$ এরূপ একটি ভেক্টর যা $\vec{\alpha} = 4\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{\beta} = \hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ এই ভেক্টরদ্বয়ের উভয়েরই লম্ব। উপরন্তু $\vec{\delta}.\vec{\gamma} = 21$ যেখানে $\vec{\gamma} = 3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$; ভেক্টর $\vec{\delta}$ নির্ণয় কর। [C.U. 1981]

উঃ ধর, $\vec{\delta} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$; $\vec{\gamma} = 3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ (দেওয়া আছে)

$\therefore \vec{\delta}.\vec{\gamma} = (x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})(3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$

অথবা $21 = (3)(x)+(1)(y)+(-1)z = 3x+y-z$ .... (i)

আবার, যেহেতু $\vec{\delta}$ এবং $\vec{\alpha}$ ও $\vec{\delta}$ এবং $\vec{\beta}$ পরস্পরের অভিলম্ব তাই তাদের স্কেলার গুণফল শূন্য।

অতএব, $\vec{\alpha}.\vec{\delta} = (4)x+(5)y+(-1)z = 4x+5y-z = 0$ ...... (ii)

এবং $\vec{\beta}.\vec{\delta} = (1)x+(-4)y+(5)z = x-4y+5z = 0$ .... (iii)

(ii) এবং (iii) সমীকরণ থেকে বজ্রগুণন (cross-multiplication) পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}=p \text{ (ধর)}$$

তাহলে, $x = p$; $y = -p$ এবং $z = -p$

এই মান (i) সমীকরণে বসালে পাই, $3p-p+p = 21$ অথবা $p = 7$

অতএব, $x = 7$; $y = -7$ এবং $z = -7$

কাজেই ভেক্টর $\vec{\delta} = 7\hat{i}-7\hat{j}-7\hat{k}$.

(7) যে ত্রিভুজের ভূমি $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা এবং একটি বাহু $2\hat{i}+3\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা প্রকাশিত হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [N.B.U. 1982]

উঃ ধর, $\vec{A} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{j}+3\hat{k}$

আমরা জানি, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}\,|\vec{A}\times\vec{B}|$

এখানে,

$$\begin{array}{l|l} A_x = 1 & B_x = 0 \\ A_y = 1 & B_y = 2 \\ A_z = 1 & B_z = 3 \end{array}$$

এখন, $\vec{A}\times\vec{B} = \hat{i}\,(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}\,(A_xB_y - A_yB_x)$

$= \hat{i}\,(1\times 3 - 1\times 2) + \hat{j}\,(1\times 0 - 1\times 3) + \hat{k}\,(1\times 2 - 2\times 0)$

$= 1\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore\ |\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{(1)^2+(-3)^2+(2)^2} = \sqrt{14}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফলের মান $= \frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{\frac{7}{2}} = 1.87.$

(8) $\vec{P} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ **এবং** $\vec{Q} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ **হলে,** $(\vec{P}+\vec{Q})$ **এবং** $(\vec{P}-\vec{Q})$ **ভেক্টরদ্বয়ের মান এবং দিক্‌সূচক কোসাইন নির্ধারণ কর।**

উঃ $(\vec{P}+\vec{Q}) = (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 4\hat{i} + 4\hat{k}$

$(\vec{P}-\vec{Q}) = (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore\ |\vec{P}+\vec{Q}| = \sqrt{(4)^2+(4)^2} = 4\sqrt{2}$

এবং $|\vec{P}-\vec{Q}| = \sqrt{(2)^2+(4)^2+(-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$(\vec{P}+\vec{Q})$-এর দিক্‌সূচক কোসাইন $= \frac{4\hat{i}}{4\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{4\hat{k}}{4\sqrt{2}}$ অথবা $\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{\hat{k}}{\sqrt{2}}$

এবং $(\vec{P}-\vec{Q})$-এর দিক্‌সূচক কোসাইন $= \frac{2\hat{i}}{\sqrt{24}}, \frac{4\hat{j}}{\sqrt{24}}, \frac{2\hat{k}}{\sqrt{24}}$ অথবা, $\frac{\hat{i}}{\sqrt{6}}, \frac{2\hat{j}}{\sqrt{6}}, \frac{\hat{k}}{\sqrt{6}}$.

(9) $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ **এবং** $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ **হলে** $\vec{A}\times\vec{B}$ **কত ?**

[C.U. 2001 ; B.U. 2005]

উঃ $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\,(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}\,(A_xB_y - A_yB_x)$

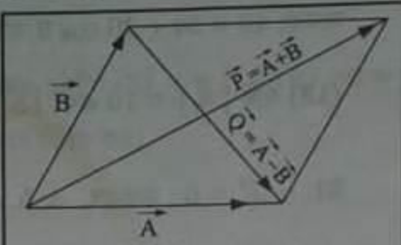
$= \hat{i}\,\{(-3)(-2) - (-1)(4)\} + \hat{j}\,\{(-1)(1) - (2)(-2)\} + \hat{k}\,\{(2)(4) - (-3)(1)\}$

$= \hat{i}\,(6+4) + \hat{j}\,\{-1+4\} + \hat{k}\,\{8+3\}$

$= \hat{i}.10 + \hat{j}.3 + \hat{k}.11$

(10) একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ এবং $(\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})$ ভেক্টর দুটির দ্বারা প্রকাশ করা হলে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [N.B.U. 2002]

উঃ 2.28 নং চিত্রানুযায়ী, $\vec{P} = \vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{Q} = \vec{A} - \vec{B}$



চিত্র 2.28

অতএব, সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু $\vec{A} = \dfrac{\vec{P}+\vec{Q}}{2}$

এবং $\vec{B} = \dfrac{\vec{P}-\vec{Q}}{2}$

$\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর মান বসালে পাই,

$$\vec{A} = \frac{1}{2}[(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) + (\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})] = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}[(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) = (\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})] = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল =

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & +2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,[A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}\,[A_zB_x - A_x B_z] + \hat{k}\,[A_xB_y - A_yB_z] = -5\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$$

$\therefore$ ক্ষেত্রফলের মান = $\sqrt{(-5)^2+(5)^2+(5)^2} = 8.67$ একক।

(11) $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ দুটি ভেক্টর। প্রত্যেক ভেক্টরের দৈর্ঘ্য এবং $\vec{A}.\vec{B}$ এর মান নির্ধারণ কর। [N.B.U. 1983]

উঃ (i) $|\vec{A}| = \sqrt{(3)^2+(4)^2+(-5)^2} = \sqrt{50}$; $\vec{A}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{50}$

এবং $|\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2+(2)^2+(6)^2} = \sqrt{41}$; $\vec{B}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{41}$

(ii) $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = (3)(-1) + (4)(2) + (-5)(6)$
$= -3 + 8 - 30 = -25.$

(12) যদি $\vec{u} + \vec{\upsilon} + \vec{\omega} = 0$ এবং $u = 3, \upsilon = 5, w = 7$ হয় তবে প্রমাণ কর কোণ $(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = \pi/3$. [N.B.U. 1992]

উঃ যেহেতু $\vec{u} + \vec{\upsilon} + \vec{w} = 0$, সেহেতু $(\vec{u} + \vec{\upsilon})$-এর লব্ধি $\vec{w}$ ভেক্টরের সমান ও বিপরীত।

যদি $(\vec{u} + \vec{\upsilon})$-এর লব্ধি $\vec{R}$ হয়, তবে

$|\vec{R}| = (\upsilon^2 + u^2 + 2u\,\upsilon\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$; এখানে, $\theta = (\vec{u}, \vec{\upsilon})$ অন্তর্বর্তী কোণ।

$= (9+25+2\times3\times5\ \cos\ \theta)^{\frac{1}{2}} = (34+30\ \cos\ \theta)^{\frac{1}{2}}.$

$\therefore\ |\vec{w}| = (34+30\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$ অথবা $|\vec{w}|^2 = 34+30\cos\theta$

অথবা, $49 = 34+30\cos\theta$ অথবা $\theta = \frac{1}{2}$ $\therefore\ \theta = \pi/3.$

(13) যদি $|\vec{a}| = 10$ এবং $|\vec{b}| = 1$ এবং $\vec{a}.\vec{b} = 6$ হয় তাহলে, $|\vec{a}\times\vec{b}|$ এর মান কত? **[C.U. 1983]**

উঃ $\vec{a}.\vec{b} = 6$; অতএব, $a.\ b.\cos\theta = 6$

অথবা, $(10)\ (1)\cos\theta = 6\ \therefore\ \cos\theta = \frac{3}{5}$

অতএব, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

এখন, $|\vec{a}\times\vec{b}| = a.b\sin\theta = (10\times1).\frac{4}{5} = 8.$

(14) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে $A\ (0,0,0)$ $B\ (1,1,1)$ এবং $C\ (0,2,3)$। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উঃ ধর, $\vec{P} = \vec{AB}$ এবং $\vec{Q} = \vec{AC}$; তাহলে $\vec{P} = i+j+k$ এবং $\vec{Q} = 2\vec{j}+3\vec{k}$

এখন, ΔABC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{P}\times\vec{Q}|$

আমারা জানি, $\vec{P}\times\vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = i-3j+2k$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\sqrt{(1)^2+(-3)^2+(2)^2} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \sqrt{3.5}\ .$

(15) কোন এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$-এর লব্ধি $\sqrt{3}\vec{B}$ এবং ঐ লব্ধি $\vec{A}$ ভেক্টরের সঙ্গে $30°$ কোণে আনত। প্রমাণ কর $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ অথবা, $|\vec{A}| = |-2\vec{B}|$

উঃ ধর, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি $= \vec{R}$; তাহলে,

$|\vec{R}| = (A^2+B^2+2AB\cos\theta)^{\frac{1}{2}}.$

[$\theta = \vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ]

প্রশ্নানুযায়ী, $|\vec{R}| = \sqrt{3}|\vec{B}|$; অতএব, $3B^2 = A^2+B^2+2AB\cos\theta$ ..... (i)

আবার, $\vec{A}$ ভেক্টরের সঙ্গে লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ যদি ϕ কোণে আনতে থাকে, তবে

$\tan\phi = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$ $\therefore\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$ .... (ii) $\left[\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$\therefore$ কৃতকার্য $W = \vec{F} \cdot \vec{x} = (12\hat{i} + 5\hat{j} + 8\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k})$

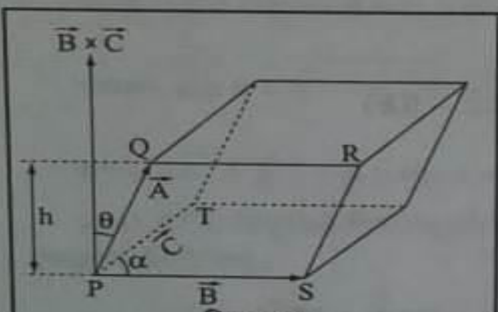
$= 12\hat{i} \cdot \hat{i} + 35\hat{j} \cdot \hat{j} + 40\hat{k} \cdot \hat{k}$

$= 12 + 35 + 40 = 87$ একক।

2.13. স্কেলার ত্রৈধ গুণন (Sclar triple product) :

দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলকে যদি তৃতীয় আর একটি ভেক্টরের সঙ্গে স্কেলার গুণ করা যায় তাহলে সেই গুণফলকে স্কেলার ত্রৈধ গুণন বলা হয়।

$\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণফল $= \vec{B} \times \vec{C}$; এইবার এই গুণফলকে আর একটি ভেক্টর $\vec{A}$ -দ্বারা স্কেলার গুণ করলে গুণফল $= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$; এটাই স্কেলার ত্রৈধ গুণনের গাণিতিক প্রকাশ। $(\vec{B} \times \vec{C})$ একটি ভেক্টর কিন্তু এর সঙ্গে $\vec{A}$ ভেক্টরের ডট গুণফল নিলে, সেটা হবে একটি স্কেলার। অতএব, স্কেলার ত্রৈধ গুণফল নিজেই একটি স্কেলার।



চিত্র 2.29

ধর, PQ, PS এবং PT একটি আনত ঘন সামান্তরিকের (parallelopiped) তিনটি সন্নিহিত বাহু। এরা যথাক্রমে $\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ এই তিনটি ভেক্টরকে প্রকাশ করে। ঐ ঘন সামান্তরিকের ভূমির ক্ষেত্রফল $= BC \sin \alpha = \vec{B} \times \vec{C}$; এই ক্ষেত্রফল-ভেক্টর (অর্থাৎ $\vec{B} \times \vec{C}$) হবে ভূমির অভিলম্ব [চিত্র 2.29]। যদি এই ভেক্টর PQ বাহুর সঙ্গে θ কোণ করে, তবে ঘন সামান্তরিকের উচ্চতা $h = PQ \cos \theta = A \cos \theta$; $A = \vec{A}$ ভেক্টরের পরম মান।

অতএব, ঘন সামান্তরিকের আয়তন = (ভূমির ক্ষেত্রফল) × (উচ্চতা)

$$= (\vec{B} \times \vec{C}) . A \cos \theta = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}).$$

কাজেই, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ এই স্কেলার ত্রৈধ গুণফল ঐ ঘন সামান্তরিকের আয়তন নির্দেশ করে। একথা বলা বাহুল্য যে ঘন সামান্তরিকের যে-কোনো তলকে ভূমি হিসাবে গণ্য করলে, তার আয়তন হবে যথাক্রমে $\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$, $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ যদি, $\vec{A} \rightarrow \vec{B} \rightarrow \vec{C}$ এই পর্যায়ক্রম বজায় রাখা যায়।

অতএব, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ ..... (i)

- **স্কেলার ত্রৈধ গুণনের বৈশিষ্ট্য :**

(a) যেহেতু বিনিময় নিয়মানুযায়ী $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ তাই,

(i) নং সমীকরণ থেকে লেখা যায় $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

সিদ্ধান্ত : ভেক্টরের ক্রমপর্যায় (cyclic order) $\vec{a} \rightarrow \vec{b} \rightarrow \vec{c}$ বজায় রাখলে, স্কেলার ত্রৈধ গুণফল নির্ণয় করতে ক্রশ (cross) এবং ডট্ (dot) স্থান বিনিময় করতে পারে।

(b) যদি ভেক্টর তিনটি একতলীয় (coplanar) হয়, তবে ঘন সামান্তরিকের আয়তন হয় শূন্য অর্থাৎ ভেক্টরগুলির স্কেলার ত্রৈধ গুণফল হয় শূন্য। ঘুরিয়ে বললে বলা যায় যে, তিনটি ভেক্টরের স্কেলার ত্রৈধ গুণফল শূন্য হলে, ভেক্টর তিনটি একতলীয় হবে।

(i) নং (ii) সমীকরণ সমাধান করলে পাই, $\theta = 60°$*

(i) নং সমীকরণে এই মান বসালে পাই, $3B^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos 60°$

$= A^2 + B^2 + AB$

অথবা, $A^2 + AB - 2B^2 = 0$

$(A - B)(A + 2B) = 0$

$A = B$ অথবা $A = -2B$.

(16) $(4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})$ নিউটন বলের অধীনে একটি কণার স্থান-ভেক্টর $(3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k})$ থেকে পরিবর্তিত হয়ে $(14\hat{i} + 13\hat{j} + 9\hat{k})$ মিটার হল। বল কর্তৃক কৃতকার্য নির্ণয় কর।

উঃ কণার প্রথম স্থান-ভেক্টর $\vec{r_1} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$

কণার দ্বিতীয় স্থান-ভেক্টর $\vec{r_2} = 14\hat{i} + 13\hat{j} + 9\hat{k}$

কণার সরণ ভেক্টর $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

$= (14\hat{i} + 13\hat{j} + 9\hat{k}) - (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k})$

$= 11\hat{i} + 11\hat{j} + 15\hat{k}$

ক্রিয়ারত বল ভেক্টর, $\vec{F} = 4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

কৃতকার্য বল-ভেক্টর এবং সরণ-ভেক্টরের স্কেলার গুণফল।

অতএব, কৃতকার্য $W = \vec{F}\cdot\vec{r} = (4\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}).(11\hat{i} + 11\hat{j} + 15\hat{k})$

$= 44(\hat{i}.\hat{i}) + 11(\hat{j}.\hat{j}) + 45(\hat{k}.\hat{k})$

$= (44 + 11 + 45)$ joule

$= 100$ **joule.**

[লক্ষ কর $\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{j} = 0$ এবং $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$]

(17) $10\hat{i} - \hat{j} + 11\hat{k}$, $4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$ এবং $-2\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k}$ এই তিনটি বলের অধীনে একটি কণার স্থান-ভেক্টর $5\hat{i} - 5\hat{j} - 7\hat{k}$ থেকে পরিবর্তিত হয়ে $6\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ হল। মোট কৃতকার্য নির্ণয় কর।

উঃ মোট কৃতকার্য $= \vec{F}.\vec{x}$ যেখানে $\vec{F}$ = কণার উপর ক্রিয়ারত লব্ধি বল এবং $\vec{x}$ = কণার সরণ ভেক্টর।

এখন, $\vec{F} = (10\hat{i} - \hat{j} + 11\hat{k}) + (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + (-2\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k})$

$= 12\hat{i} + 5\hat{j} + 8\hat{k}$

এবং সরণ ভেক্টর $\vec{x}$ = দ্বিতীয় স্থান-ভেক্টর – প্রথম স্থান-ভেক্টর

$= (6\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) - (5\hat{i} - 5\hat{j} - 7\hat{k}) = \hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}$

---

*(ii) নং সমীকরণ থেকে, $A + B\cos\theta = \sqrt{3}.B\sin\theta$.

বর্গ নিলে, $A^2 + B^2\cos^2\theta + 2AB\cos\theta = 3B^2\sin^2\theta$

অথবা $A^2 + B^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta + 2AB\cos\theta = 4B^2\sin^2\theta$

অথবা $A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta = 4B^2\sin^2\theta$ অথবা $3B^2 = 4B^2 = 4B^2\sin^2\theta$.

$\therefore \sin^2\theta = \frac{3}{4}$ অথবা $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ অথবা $\theta = 60°$.

(c) স্কেলার ত্রৈধ গুণনকে ভেক্টর উপাংশগুলির সাহায্যে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়।

ধরা যাক বেস ভেক্টর $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ -এর সাপেক্ষে $\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ -এর উপাংশ যথাক্রমে A_x, A_y, A_z ; B_x, B_y, B_z এবং C_x, C_y, C_z ; তাহলে

$$\vec{B} \times \vec{C} = (B_yC_z - B_zC_y)\,\hat{i} + (B_zC_x - B_xC_z)\,\hat{j} + (B_xC_y - (B_yC_x)\,\hat{k}$$

অতএব, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$

ডিটারমিন্যান্ট আকারে উপরোক্ত ফলাফলকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়

$$A.(\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Examples : (1) তিনটি ভেক্টর $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $3\hat{i} + a\hat{j} + 5\hat{k}$ একতলীয় হলে, a-এর মান কি হবে ? **[N.B.U. 1994]**

উঃ তিনটি ভেক্টর একতলীয় হলে, তাদের স্কেলার ত্রৈধ গুণফল শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ [$\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ তিনটি ভেক্টর]

অথবা, $A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x) = 0$

ডিটারমিন্যান্টের আকারে সাজালে হয়

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = 0$$

প্রদত্ত প্রশ্নে $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 3\hat{i} + a\hat{j} + 5\hat{k}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & a & 5 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 2[10 - (3a)] + (-1)[-9 - 5] + (a - 6) = 0$$

অথবা $20 + 6a + 14 + a - 6 = 28 + 7a = 0$

$$\therefore a = -4.$$

(2) দেখাও যে $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত। **[C.U. 2005]**

উঃ তিনটি ভেক্টর একতলীয় হলে, তাদের স্কেলার ত্রৈধ গুণফল শূন্য হয়।

সুতরাং, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ দেখাতে পারলে, ভেক্টর তিনটি সমতলে অবস্থিত প্রমাণিত হবে।

এখন, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_x(B_xC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$

ডিটারমিন্যান্টের আকারে সাজালে হয়

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

সর্বশেষ ফলাফল মনে রাখার জন্য নিম্নলিখিত নির্দেশ মনে রাখ :

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ -কে প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় ভেক্টর বললে,

ভেক্টর ত্রৈধ গুণন $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) =$ (প্রথম . তৃতীয়) . দ্বিতীয় – (প্রথম . দ্বিতীয়) . তৃতীয়।

বৃত্তীয় গতির ক্ষেত্রে ভেক্টর ত্রৈধ গুণফলের প্রয়োগ দেখা যায়। কোন বিন্দুর চতুর্দিকে ঘূর্ণায়মান কণার কৌণিক ভরবেগ, অভিকেন্দ্র ত্বরণ প্রভৃতি ভেক্টর ত্রৈধ গুণফলের উদাহরণ।

● **Examples : (1)** প্রমাণ কর, $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

[C.U. 2000, '03 ; N.B.U. 1994, 2002 ; Burd. U. 2005]

উঃ আমরা দেখেছি, $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}).\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}).\vec{C}$

একইভাবে, $\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) = (\vec{B} \times \vec{A}).\vec{C} - (\vec{B} \cdot \vec{C}).\vec{A}$

এবং $\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{C} \cdot \vec{B}).\vec{A} - (\vec{C} \cdot \vec{A}).\vec{B}$

যোগ করলে, $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$.

$$= \{(\vec{A} \cdot \vec{C}).\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\,\vec{C}\} + \{(\vec{B} \cdot \vec{A})\,\vec{C} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\,\vec{A}\}$$
$$+ \{(\vec{C} \cdot \vec{B})\,\vec{A} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\,\vec{B}\} = 0.$$

(2) $\vec{A} = 5\hat{i} - 7\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{i} + 7\hat{j} - 8\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$। নিম্নলিখিত গুণফলগুলির মান নির্ণয় কর : (i) $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$ এবং (ii) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$।

উঃ (i) $(\vec{A} \times \vec{B}) = (5\hat{i} - 7\hat{j} + 3\hat{k}) \times (4\hat{i} + 7\hat{j} - 8\hat{k})$

$$= 35\hat{i} - 28\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\therefore (\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C} = (35\hat{i} - 28\hat{j} + 7\hat{k}).(2\hat{i} - 3\hat{j})$$
$$= 7.0(\hat{i}\,\hat{i}) + 84 + 0\,(\hat{j}\,\hat{j}) + 7.0\,(\hat{k}\,\hat{k}) = 70 + 84 + 0 = 154$$

(ii) $(\vec{B} \times \vec{C}) = (4\hat{i} + 7\hat{j} - 8\hat{k}) \times (2\hat{i} - 3\hat{j})$

$$= -24\hat{i} - 16\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (5\hat{i} - 7\hat{j} + 3\hat{k}) \times (-24\hat{i} - 16\hat{j} - 2\hat{k})$$
$$= 62\hat{i} + 62\hat{j} - 248\hat{k}.$$

(3) যাচাই কর : $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} \times \vec{A} \times \vec{C}$ যেখানে $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$.

[C.U. 2005]

উঃ $\vec{B} + \vec{C} = (-\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) + (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 0 + 5\hat{j} - \hat{k}$

$$\therefore \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \times (0 + 5\hat{j} - \hat{k})$$

$$= \hat{i}\,[(A_y B_z - B_y A_z)] + \hat{j}\,[(A_z B_x - B_z A_x) + \hat{k}\,[(A_x B_y - B_x A_y)]$$

$$= \hat{i}\,[(-2)(-1)-(1)(5)] + \hat{j}\,[(1)(0)-(1)(1)] + \hat{k}\,[(1)(5)-2(0)]$$

$$= -3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k} \;\ldots\ldots\; \text{(i)}$$

আবার, $\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \times (-\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \hat{i}\,[(-2)(2)-(1)(3)] + \hat{j}\,[(1)(-1)-(1)(2)] + \hat{k}\,[(1)(3)-(-2)(-1)]$$

$$= -7\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

এবং $(\vec{A} \times \vec{C}) = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

$$= \hat{i}\,[(-2)(-3)-(1)(2)] + \hat{j}\,[(1)(1)-(1)(-3)] + \hat{k}\,[(1)(2)-(-2)(1)]$$

$$= 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k},$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} = (-7\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) + (4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$= -3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k} \;\ldots\ldots\; \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) সমীকরণ সমান হওয়ায় প্রশ্নের সম্পর্কটি যাচাই করা হল।

2.15. ভেক্টর কলন (Vector Calculus) :

(ii) অবকলনের নিয়ম (Differentiation rules) :

ভেক্টর অবকলনের নিয়মাবলী স্কেলার অবকলনের নিয়মাবলীর মত একই।

(a) ভেক্টর যোগফলের অথবা বিয়োগফলের অবকলন :

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \pm \frac{d\vec{B}}{dt}$$

(b) দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফলের অবকলন :

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B}.\frac{d\vec{A}}{dt}$$

(c) দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের অবকলন :

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B} \times \frac{d\vec{A}}{dt}$$

(d) ভেক্টরকে স্কেলার দ্বারা গুণফলের অবকলন :

$$\frac{d}{dt}(\phi\vec{A}) = \phi\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\vec{A}$$ [ϕ স্কেলার-ফলন t-এর অবকলনযোগ্য]

(e) স্কেলার ত্রৈধ গুণনের অবকলন :

$$\frac{d}{dt}[\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})] = \vec{A}.\left(\vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{dt}\right) + \vec{A}.\left(\frac{d\vec{B}}{dt} \times \vec{C}\right) + \frac{d\vec{A}}{dt}.(\vec{B} \times \vec{C})$$

(f) ভেক্টর ত্রৈধ গুণনের অবকলন :

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})\right] = \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{dt}\right) + \vec{A} \times \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \times \vec{C}\right) + \frac{d\vec{A}}{dt}(\vec{B} \times \vec{C})$$

2.5. স্কেলার এবং ভেক্টর রাশির যোগ (Addition of scalars and vectors) :

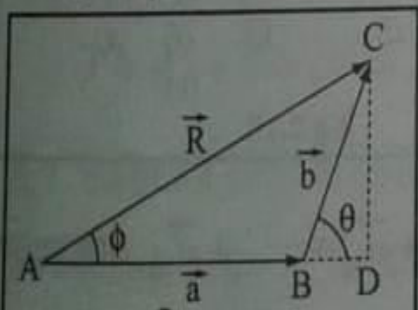
স্কেলার রাশির বিশেষত্ব এই যে, দুটি স্কেলার একজাতীয় হলে, তাদের যোগফল বা বিয়োগফল তাদের মানের যোগফল বা বিয়োগফলের সমান। যেমন, তিনটি বস্তুর ভর যথাক্রমে 5 গ্রাম, 10 গ্রাম এবং 15 গ্রাম হলে, তাদের মোট ভর = (5 + 10 + 15) = 30 গ্রাম। আবার মনে কর, একটি পরীক্ষাকার্য সমাধা করতে এবং হিসাব করে ফলাফল নির্ণয় করতে মোট সময় লাগল 5 ঘণ্টা। শুধু পরীক্ষাকার্য সম্পন্ন করতে যদি 3 ঘণ্টা সময় লাগে, তবে হিসাবের জন্য লেগেছে (5 – 3) = 2 ঘণ্টা। মনে রাখতে হবে যে একজাতীয় না হলে দুটি স্কেলার যোগ বা বিয়োগ করা যায় না। ভরের সঙ্গে ভরই যোগ করা যায় বা ভর থেকে কেবল ভরই বিয়োগ করা যায় ; ভরের সঙ্গে আয়তনের যোগ বা বিয়োগ সম্ভব নয়।

ভেক্টর রাশির যোগফলের বেলায় পূর্বোক্ত সরল নিয়ম খাটে না কারণ এক্ষেত্রে শুধু মান নয়—দিকের কথাও বিবেচনা করতে হবে। ভেক্টর রাশির যোগ তিনটি সূত্রের সাহায্যে করা যেতে পারে : (i) ত্রিভুজ সূত্র (law of triangle), (ii) সামান্তরিক সূত্র (law of parallelogram) এবং (iii) বহুভুজ সূত্র (law of polygon)।

(i) ত্রিভুজ সূত্র (Law of triangle) :

একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত দুটি বাহু একবিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টরকে মানে ও দিকে প্রকাশ করলে বিপরীতক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহু মানে ও দিকে উক্ত ভেক্টর দুটির যোগফল বা লব্ধি বোঝাবে। একেই ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র বলে।

মনে কর, $\vec{AB}$ একটি ভেক্টর (চিত্র 2.8)। A আদি বিন্দু এবং B শেষ বিন্দু। এক জাতীয় আর একটি ভেক্টর $\vec{BC}$ এইরূপভাবে ক্রিয়া করছে যে, তার আদি বিন্দু B এবং শেষ বিন্দু C ; এই দুই ভেক্টরের যোগফল নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র 2.8

A এবং C-কে যুক্ত করে ABC ত্রিভুজ সম্পূর্ণ করো। ত্রিভুজ সূত্রানুসারে $\vec{AB}$ এবং $\vec{BC}$ ভেক্টরদ্বয়কে যোগ করলে লব্ধি হিসাবে পাওয়া যাবে $\vec{AC}$ ভেক্টর। ভেক্টরের নিয়ম অনুযায়ী লেখা যায়,

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \text{ অথবা } \vec{a} + \vec{b} = \vec{R}$$

কাজেই, $d\vec{A} = \frac{\delta \vec{A}}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta \vec{A}}{\delta y} \cdot dy + \frac{\delta \vec{A}}{\delta z} \cdot dz.$

Example : ধরা যাক্ $\vec{A}(t)$ হল স্কেলার চলরাশি t-এর একটি ভেক্টর অপেক্ষক যার মান ধ্রুবক। প্রমাণ কর $\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$ ভেক্টরটি $\vec{A}(t)$ ভেক্টরের সঙ্গে লম্ব। ধর, $\left|\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\right| \neq 0.$ [C.U. 2001]

উঃ $\vec{A}(t)$ ভেক্টরের মান ধ্রুবক অর্থাৎ $|\vec{A}| =$ ধ্রুবক।

এখন, ডট্ গুণনের নিয়ম থেকে পাই, $\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}|^2$

t-এর সাপেক্ষে ডিফারেন্সিয়েট করলে পাই, $2\vec{A}.\frac{d\vec{A}}{dt} = 2|\vec{A}|\frac{d}{dt}(\vec{A})$

$|\vec{A}|$ ধ্রুবক হওয়ায় $\frac{d}{dt}(\vec{A}) = 0$; অতএব, $2\vec{A}\,\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$

অর্থাৎ, $\vec{A}(t).\frac{d\vec{A}}{dt}(t) = 0$

দুটি ভেক্টরের ডট গুণফল শূন্য হলে ভেক্টর দুটি পরস্পরের লম্ব হয়। অতএব, $\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$ ভেক্টরটি $\vec{A}(t)$ ভেক্টরের সঙ্গে লম্ব।

উপরোক্ত সমীকরণ থেকে আমরা $\nabla\phi$-এর মান এবং অভিমুখ পাই। মান $= \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) = \phi$-এর সর্বাধিক পরিবর্তনের হার এবং অভিমুখ X লেভেল তলের (যেখানে স্কেলার ϕ ধ্রুবক) অভিলম্ব বরাবর।

Examples : (1) একটি স্কেলার অপেক্ষক $\phi = 3x^2y - 2xz^3$ জন্য $(1, 2, -3)$ বিন্দুতে grad ϕ নির্ণয় কর।

[N.B.U. 2009]

উঃ grad $\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$ । এখন $\phi = 3x^2y - 2xz^3$

$$\therefore \frac{d\phi}{dx} = 6xy - 2z^3;\ \frac{d\phi}{dy} = 3x^2 \text{ এবং } \frac{d\phi}{dz} = -6xz^2$$

$$\therefore \nabla\phi = \hat{i}(6xy - 2z^3) + \hat{j}.3x^2 + \hat{k}(-6xz^2)$$

অথবা, $\nabla\phi(1, 2, -3) = \hat{i}\,(6\times1\times2 - 2(-3)^3] + \hat{j}\,(3\times1) + \hat{k}(-6\times1\times9)$

$$= 66\hat{i} + 3\hat{j} - 54\hat{k}$$

$$\therefore |\nabla\phi| = \sqrt{(66)^2 + (3)^2 + (-54)^2} = \sqrt{7282}.$$

(2) স্কেলার অপেক্ষক $u = \vec{a}.\vec{r}$ এর গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় কর যেখানে $\vec{a}$ একটি স্থির ভেক্টর রাশি এবং $\vec{r}$ একটি স্থান-ভেক্টর।

(iv) Curl curl $\vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \text{grad div } \vec{A} - (\nabla^2)\vec{A}$ [2.22 অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য]

Examples : (1) প্রমাণ কর Div curl $\vec{A} = 0$. [C.U. 2001]

উঃ Div curl $\vec{A} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{A})$.

এখন, $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{curl } \vec{A} = \hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

$\therefore \nabla.(\vec{\nabla} \times \vec{A})$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left[\hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}.$$

$= 0$

অনুরূপভাবে, ϕ ক্ষেত্রীয় স্কেলার হলে তার আয়তন সমাকল হবে $\int_V \phi dV$। এটি একটি স্কেলার।

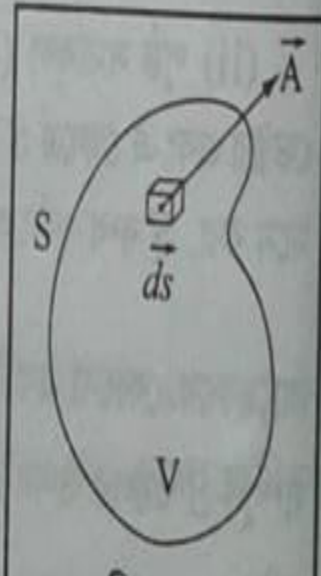
2.19. দুটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য (Two important theorems) :

ভেক্টর বিশ্লেষণে দুটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য প্রায়ই ব্যবহার করা হয়। একটি হল ডাইভারজেন্স উপপাদ্য এবং অপরটি স্টোক্স উপপাদ্য। অবস্থা বিশেষে পৃষ্ঠ সমাকলকে আয়তন সমাকলে অথবা আয়তন সমাকলকে পৃষ্ঠ সমাকলে রূপান্তরিত করার প্রয়োজন হয়। ডাইভারজেন্স উপপাদ্যের সাহায্যে এই রূপান্তরণ করা যায়। আবার অনেক সময় রেখা সমাকলকে পৃষ্ঠ সমাকলে বা পৃষ্ঠ সমাকলকে রেখা সমাকলে পরিণত করার প্রয়োজন হয়। এই কাজ স্টোক্স উপপাদ্যের সাহায্যে করা যায়।

(ক) ডাইভারজেন্স উপপাদ্য (Divergence theorem) :

এই উপপাদ্যের সাহায্যে আয়তন সমাকলকে (volume integral) পৃষ্ঠ সমাকলে (surface integral) পরিণত করা যায়। উল্টোভাবে পৃষ্ঠ সমাকলকেও আয়তন সমাকলে রূপান্তরিত করা যায়। ভেক্টর বিশ্লেষণে এই উপপাদ্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ। উপপাদ্যটি নিম্নলিখিতভাবে বিবৃত করা যায় :

কোনো ক্ষেত্রীয় ভেক্টর $\vec{A}$-র নিজ ক্ষেত্রে যে-কোনো আয়তন V ব্যাপী তার ডাইভারজেন্সের আয়তন-সমাকল নিলে, তা ঐ আয়তনের বদ্ধ পৃষ্ঠ S-এ $\vec{A}$-ভেক্টরের পৃষ্ঠ সমাকলের অথবা, বদ্ধ পৃষ্ঠ S ভেদ করে $\vec{A}$-ভেক্টরের ফ্লাক্সের সমান হবে (চিত্র 2.38)। উপপাদ্যের গাণিতিক রূপ :



চিত্র 2.38

$$\int_V (\vec{\nabla}.\vec{A})\,dV = \int_S (\vec{A}.\vec{dS}) \quad \ldots \text{(i)}$$

সমকোণী কার্টেসীয় নির্দেশতন্ত্রে $\vec{A} = \hat{i}.A_x + \hat{j}.A_y + \hat{k}.A_z$; $dV = dx.\,dy.\,dz$

এবং $dS_x = dy.dz$; $dS_y = dx.dz$; $dS_z = dx.dy$

(i) নং সমীকরণে এই মান বসালে পাই,

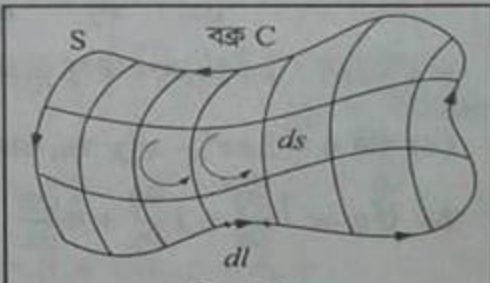
$$\int_V \left[\frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{\delta A_y}{\delta y} + \frac{\delta A_z}{\delta z}\right] dxdydz = \int_S (A_x dydz + A_y dzdx + A_z dxdy) \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

(i) নং সমীকরণে পাওয়া ভেক্টর রূপকে বলা হয় ডাইভারজেন্স উপপাদ্য এবং (ii) নং সমীকরণে পাওয়া কার্টেসীয় রূপকে বলা হয় গাউসের উপপাদ্য।

(খ) স্টোকস্ উপপাদ্য (Stock's theorem) :

এটিও ভেক্টর বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এই উপপাদ্যের সাহায্যে পৃষ্ঠ সমাকলকে রেখা সমাকলে (line integral) অথবা রেখা সমাকলকে পৃষ্ঠ সমাকলে রূপান্তরিত করা সম্ভব। এই উপপাদ্যকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়।

$\vec{A}$ যদি একটি ক্ষেত্রীয় ভেক্টর হয় এবং ঐ ক্ষেত্রে C একটি বক্র রেখা হয় তাহলে, ঐ C রেখা দ্বারা সীমাবন্ধ যে কোনো আকারের একটি ক্ষেত্র S ভেদ করে curl $\vec{A}$-এর ফ্লাক্স্ হবে C বন্ধরেখা বরাবর $\vec{A}$-ভেক্টরের রেখা সমাকলের সমান [চিত্র 2.39]।



চিত্র 2.39

এর গাণিতিক রূপ : $\int_S \text{curl}\,\vec{A}\cdot\vec{dS} = \oint_C \vec{A}\,\vec{dl}$ ..... (i)

$dl = C$ বক্র রেখার উপর একটি ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য।

যেহেতু curl $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, তাই (i) সমীকরণকে নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায় :

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A}).\vec{dS} = \oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl}\cdot \quad \ldots\ldots \text{(ii)}$$

*2.20. লাপ্লাসিয়ান সংকারক (The Laplacian operator $\vec{\nabla}^2$) :

পূর্বে আমরা দেখেছি, $\vec{\nabla} = \hat{i}.\frac{\delta}{\delta x} + \hat{j}.\frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}$

এইবার আমরা যদি $\vec{\nabla}$ এবং $\vec{\nabla}$ এর স্কেলার গুণন করি তবে পাই,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \left(\hat{i}.\frac{\delta}{\delta x} + \hat{j}.\frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}\right).\left(\hat{i}.\frac{\delta}{\delta x} + \hat{j}.\frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}\right)$$

$$\frac{\delta^2}{\ldots} + \frac{\delta^2}{\ldots} + \frac{\delta^2}{\ldots} = \vec{\nabla}^2$$

$\vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$ এই সংকারককে লাপ্লাসিয়ান সংকারক বা সংক্ষেপে শুধু লাপ্লাসিয়ান বলা হয়। পদার্থবিজ্ঞানে লাপ্লাসিয়ানের প্রয়োগ বহু ক্ষেত্রে পাওয়া যায়। এটি একটি স্কেলার সংকারক। স্কেলারের উপর এই সংকারক ক্রিয়া করলে স্কেলার পাওয়া যায়; আবার ভেক্টরের উপর ক্রিয়া করলে ভেক্টর পাওয়া যায়।

*2.21. ভেক্টরের কার্লের কার্ল (Curl of curl of a vector) ঃ

2.14 অনুচ্ছেদে আমরা দেখেছি curl $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$; আমরা যদি এখন $\vec{\nabla}$ এবং $(\vec{\nabla} \times \vec{A})$-এর ভেক্টর গুণফল নির্ণয় করি তবে পাই $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$; একেই $\vec{A}$ ভেক্টরের কার্লের কার্ল বলা হয়। অর্থাৎ

$$\vec{A} \text{ ভেক্টরের কার্লের কার্ল} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - (\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$= \text{grad div } \vec{A} - (\vec{\nabla}^2)\vec{A}.$$

[ভেক্টর সূত্র ঃ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}\,(\vec{A} \times \vec{C}) - (\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}$]

● **Examples :**

(1) $\phi = e^{xyz}$ হলে grad ϕ নির্ণয় কর।

উঃ grad $\phi = \hat{i}\dfrac{\delta\phi}{\delta x} + \hat{j}\dfrac{\delta\phi}{\delta y} + \hat{k}\dfrac{\delta\phi}{dz}$

$= \hat{i}\,yze^{xyz} + \hat{j}\,zxe^{xyz} + \hat{k}\,xye^{xyz} = e^{xyz}(\hat{i}\,yz + \hat{j}\,zx + \hat{k}\,xy).$

(2) যদি $\phi = 2xz^4 - x^2y$ হয়, তাহলে $(2, -2, -1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\phi$ কত ? [C.U. 2000]

উঃ $\vec{\nabla}\phi = \hat{i}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$

এখন, $\phi = 2xz^4 - x^2y$; অতএব, $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 2z^4 - 2xy$; $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -x^2$ এবং $\dfrac{\partial\phi}{\partial z} = 8xz^3$

$\therefore\ \vec{\nabla}\phi = \hat{i}\,(2z^4 - 2xy) + \hat{j}\,(-x^2) + \hat{k}\,(8xz^3)$

$= \hat{i}\,[(2(-1)^4 - 2\times 2\,(-2)] - \hat{j}\,(2)^2 + \hat{k}\,(8\times 2\times(-1)^3]$

$= 10\hat{i} - 4\hat{j} - 16\hat{k}.$

(3) $\phi = \dfrac{1}{r}$ হলে $\vec{\nabla}\phi$ কত ? [C.U. 2004, '08]

উঃ $\vec{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z$

তাহলে $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

এখন, $\vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \vec{\nabla}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \vec{\nabla}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

$= \hat{i}\dfrac{\delta}{\delta x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \hat{j}\dfrac{\delta}{\delta y}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \hat{k}\dfrac{\delta}{\delta z}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

* বর্ধমান বিশ্ববিদ্যালয়ের জন্য

$$= \hat{i}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}.2x\right]+\hat{j}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}.2y\right]$$
$$+\hat{k}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}.2z\right]$$

$$= \frac{-\hat{i}x-\hat{j}y-\hat{k}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

(4) $\vec{A} = \hat{i}x^2z - \hat{j}.2y^3z^2 + \hat{k}xy^2z$ হলে $(1, -1, 1)$ বিন্দুতে div $\vec{A}$-এর মান নির্ণয় কর।
[C.U.2005, N.B.U. 2005]

উঃ $\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\delta}{\delta x}+\hat{j}\frac{\delta}{\delta y}+\hat{k}\frac{\delta}{\delta z}\right).(\hat{i}x^2z - \hat{j}.2y^3z^2+\hat{k}xy^2z)$

$$= \frac{\delta}{\delta x}(x^2z)+\frac{\delta}{\delta y}(-2y^3z^2)+\frac{\delta}{\delta z}(xy^2z)$$
$$= 2xz - 6y^2z^2 + xy^2$$
$$= 2(1)(1) - 6(-1)^2(1)^2 + (1)(-1)^2 = -3.$$

(5) প্রমাণ কর : $\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{r}) = \vec{A}$ যেখানে $\vec{A}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর এবং $\vec{r}$ একটি স্থান-ভেক্টর।
[C.U. 2000]

উঃ $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ এবং $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ এবং $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

এখন, $\vec{A}.\vec{r} = (\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z).(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) = A_x x + A_y.y + A_z.z$

$\therefore \vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{r}) = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(A_x.x)+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(A_y.y)+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(A_z.z)$

$$= \hat{i}A_x+\hat{j}A_y+\hat{k}A_z+\hat{i}.x\frac{\partial A_x}{\partial x}+\hat{j}.y\frac{\partial A_y}{\partial y}+\hat{k}.z\frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$= \vec{A}+\vec{r}\,(\vec{\nabla}.\vec{A})$$
$$= \vec{A} \qquad [\vec{A} \text{ ধ্রুবক ভেক্টর হওয়ায় } \vec{\nabla}.\vec{A} = 0].$$

(6) b-এর কি মান হলে, $\vec{B}$ চৌম্বক ক্ষেত্র $\vec{B} = \hat{i}(x+3y) + \hat{j}(y-2x) + \hat{k}(x+bz)$ সলিনয়ডাল হবে ?

উঃ কোনো ভেক্টর সলিনয়ডাল হলে ঐ ভেক্টরের ডাইভারজেন্স শূন্য হয়। এখন,

div $\vec{B} = \vec{\nabla}.\vec{B} = \left(\hat{i}\frac{\delta}{\delta x}+\hat{j}.\frac{\delta}{\delta y}+\hat{k}\frac{\delta}{\delta z}\right).[\hat{i}(x+3y) + \hat{j}(y-2x) + \hat{k}(x+bz)]$

$$= \frac{\delta}{\delta x}(x+3y)+\frac{\delta}{\delta y}(y-2x)+\frac{\delta}{\delta z}(x+bz)$$
$$= 1+1+b = 2+b$$

এখন, $\vec{B}$ সলিনয়ডাল হলে div $\vec{B} = 0 \therefore 2+b = 0$ অথবা $b = -2$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র থেকে পাই,

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{R}$ অথবা $\vec{a} + \vec{b} - \vec{R} = 0$

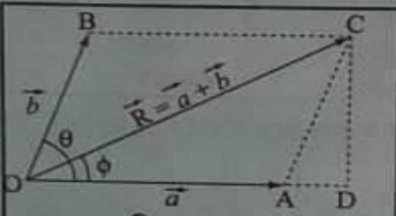
কিন্তু $-\vec{R}$ ভেক্টরটি সূচিত হয় $\vec{CA}$ দ্বারা। অতএব,

$\vec{a} + \vec{b} - \vec{R} = 0$ দাঁড়ায় $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$

সিদ্ধান্ত ঃ কোনো কণার উপর ক্রিয়াশীল তিনটি ভেক্টরকে যদি মানে এবং অভিমুখে একটি ত্রিভুজের পরপর ক্রমানুসারে গৃহীত (taken in order) তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যায়, তবে ঐ তিনটি ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হবে।

(ii) সামান্তরিক সূত্র (Law of parallelogram) :

সূত্রটি নিম্নরূপ ঃ যদি কোনো সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু মানে ও দিকে দুটি একজাতীয় ভেক্টর নির্দেশ করে তবে ঐ বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভিতর দিয়ে অঙ্কিত কর্ণ (diagonal) মানে ও দিকে তাদের যোগফল বা লব্ধি ভেক্টর প্রকাশ করে।



চিত্র 2.9

মনে কর, $\vec{OA}$ এবং $\vec{OB}$ ভেক্টরদ্বয় একই আদিবিন্দু O থেকে ক্রিয়া করছে। তাদের শেষ বিন্দু যথাক্রমে A এবং B। সামান্তরিক সূত্রানুযায়ী OA এবং OB রেখাংশকে সন্নিহিত বাহু ধরে নিয়ে $OACB$ সামান্তরিক সম্পূর্ণ করলে কর্ণ $\vec{OC}$ মানে ও দিকে লব্ধি ভেক্টরকে প্রকাশ করবে।

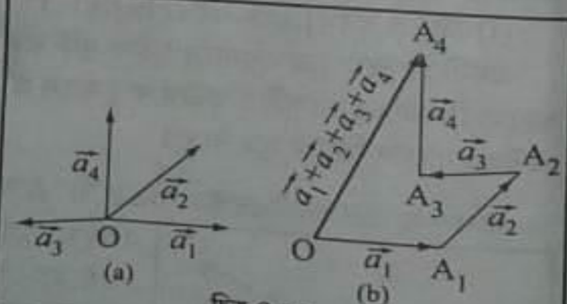
$\therefore \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$ অথবা $\vec{a} + \vec{b} = \vec{R}$

লব্ধি ভেক্টরের মান হবে, $|\vec{R}| = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$* এবং অভিমুখ হবে $\tan\phi = \dfrac{a\sin\theta}{a+b\cos\theta}$.

(iii) বহুভুজ সূত্র (Law of polygon) :

দুয়ের অধিক ভেক্টর থাকলে তাদের যোগফল বহুভুজ সূত্রের দ্বারা সহজে নির্ণয় করা যায়। ত্রিভুজ সূত্র বা সামান্তরিক সূত্রের সাহায্যে একাধিক ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয় করতে হলে, ঐ সূত্র দুটি বার বার প্রয়োগ করতে হয়। বহুভুজ সূত্রে এই অসুবিধা নাই।

সমতলে অবস্থিত $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ এবং $\vec{a}_4$ এই চারটি ভেক্টরের কথা বিবেচনা করা যাক্ [চিত্র 2.10(a)] যে-কোনো একটি বিন্দু O থেকে [চিত্র 2.10(b)] $\vec{OA_1}$ ভেক্টর আঁক যাতে $\vec{OA_1} = \vec{a}_1$ হয়। A_1 বিন্দুকে আদি বিন্দু ধরে $\vec{A_1A_2}$ ভেক্টর আঁক যাতে $\vec{A_1A_2} = \vec{a}_2$ হয়। পূর্বের মত A_2 বিন্দুকে আদি বিন্দু ধরে $\vec{a}_3$ ভেক্টর আঁক যেন $\vec{A_2A_3} = \vec{a}_3$ হয়। একইভাবে $\vec{a}_4$ ভেক্টরকেও $\vec{A_3A_4}$ ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ কর। এখন প্রথম ভেক্টরের আদি বিন্দু O এবং শেষ ভেক্টরের শেষ বিন্দু A_4 যুক্ত কর। এই ক্ষেত্রে $\vec{OA_4}$ ভেক্টর $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ইত্যাদি ভেক্টরগুলির যোগফল বোঝাবে



চিত্র 2.10

অর্থাৎ, $\vec{OA_4} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$; সাধারণভাবে, $\vec{OA_n} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots\ldots + \vec{a}_n$, একে বহুভুজ সূত্র বলে কারণ ভেক্টরগুলিকে রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করলে তারা একটি বহুভুজ (polygon) গঠন করে।

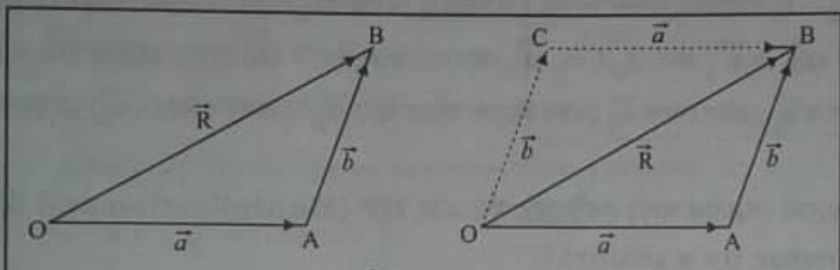
* উচ্চমাধ্যমিক স্তরে প্রমাণ দেওয়া হয়েছে।

কোনো বিন্দুতে ক্রিয়াশীল সমজাতীয় একাধিক ভেক্টরকে যদি একটি বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা মানে ও অভিমুখে প্রকাশ করা যায় তবে বিপরীতক্রমে গৃহীত অন্তিম বাহুটি ঐ ভেক্টরগুলির লব্ধির মান ও অভিমুখ নির্দেশ করবে।

[দ্রঃ ভেক্টরগুলি এক সমতলে না থাকলেও বহুভুজ সূত্র প্রয়োগ করা যেতে পারে। তাছাড়া যে-কোনো ভেক্টরকে ইচ্ছামত আগে-পরে নেওয়া যেতে পারে ; তাতে কোন ভুল হয় না।]

2.6. ভেক্টর যোগফল বিনিময় নিয়ম ও সংযোগ নিয়ম মেনে চলে (Vector addition follows commutative and associative laws) :

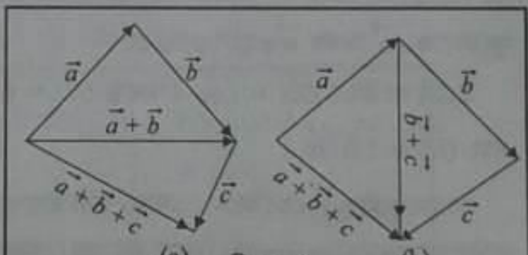
কোনো $\vec{OA}$ এবং $\vec{AB}$ যথাক্রমে দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-কে প্রকাশ করে। ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী $\vec{a}+\vec{b} = \vec{R}$ [চিত্র 2.11(a)] এখন $OABC$ সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর [চিত্র 2.11(b)] ; ΔOBC-তে $\vec{OC}$ ভেক্টর $\vec{b}$-কে এবং $\vec{CB}$ ভেক্টর $\vec{a}$-কে প্রকাশ করে। অতএব, $\vec{b}+\vec{a} = \vec{R}$



চিত্র 2.11

এক্ষেত্রে $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$; দেখা যাচ্ছে দুটি ভেক্টরের যোগ পদ্ধতিতে ক্রমপর্যায়ের (order) কোনো গুরুত্ব নেই। এই ঘটনাকে বিনিময় নিয়ম বলা হয়। উল্লেখযোগ্য যে স্কেলার যোগফলেও বিনিময় নিয়ম প্রযোজ্য।

আবার, 2.12 নং চিত্রে প্রদর্শিত তিনটি ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ বিবেচনা কর। যদি প্রথমে $\vec{a}$ ভেক্টরের সঙ্গে $\vec{b}$ ভেক্টর যোগ করি তবে পাই $(\vec{a}+\vec{b})$। তারপর এর সঙ্গে $\vec{c}$ ভেক্টর যোগ করলে যোগফল হয় $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ [চিত্র 2.12(a)]।



চিত্র 2.12

প্রথমে $\vec{a}$ ভেক্টর এবং $\vec{b}$ ভেক্টর যোগ না করে যদি $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয়কে যোগ করা যায় তবে পাই $(\vec{b}+\vec{c})$। এর সঙ্গে $\vec{a}$ ভেক্টরকে যোগ দিলে যোগফল হয় $= (\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}$ [চিত্র 2.12(b)]। চিত্র হতে দেখা যায় যে এই দুই যোগফল সর্ববিষয়ে সমান। অতএব,

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = (\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}$; একে সংযোগ নিয়ম বলে।

2.7. ভেক্টরের বিয়োগ (Subtraction of vectors) :

ধর, একটি ভেক্টর $\vec{a}_2$ থেকে আর একটি ভেক্টর $\vec{a}_1$ বিয়োগ করতে হবে। একটি বিন্দু O-কে আদি বিন্দু ধরে $\vec{OA_1}$ এবং $\vec{OA_2}$ দুটি ভেক্টর আঁক যাতে $\vec{OA_1} = \vec{a}_1$ এবং $\vec{OA_2} = \vec{a}_2$ হয়। এখন, $\vec{a}_2$ ভেক্টর থেকে $\vec{a}_1$

অনুসিদ্ধান্ত : (ক) $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হলে, স্কেলার গুণফলের সংজ্ঞানুযায়ী,

$\vec{A} = 0$ অথবা, $\vec{B} = 0$ অথবা, $\theta = 90°$; $\theta = 90°$ হলে বোঝা যায় ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের লম্ব। সুতরাং **দুটি অভিলম্ব ভেক্টরের স্কেলার গুণফল সর্বদা শূন্য।**

(খ) যখন $\theta = 0$ অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় সমমুখী, তখন তাদের ডট গুণফল ভেক্টরদ্বয়ের পরমমানের পজিটিভ গুণফলের সমান কারণ $\cos 0° = 1$ অর্থাৎ $\vec{A}.\vec{B} = A.B$ অথবা, দুটি ভেক্টর পরস্পরের সমান্তরাল হলে তাদের স্কেলার গুণফল ভেক্টরদ্বয়ের পরমমানের গুণফলের সমান হবে। উপরন্তু যদি $\vec{A} = \vec{B}$ হয় অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় অভিন্ন হয় তবে $\vec{A}.\vec{B} = A.A = A^2$

(গ) যখন $\theta = \pi$ অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয়ের অভিমুখ বিপরীত, তখন $\cos\theta = \cos\pi = -1$; এক্ষেত্রে $\vec{A}.\vec{B} = -A.B$ এই অবস্থায় ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণফল তাদের পরমমানের নেগেটিভ গুণফলের সমান।

(ঘ) খ-অনুসিদ্ধান্ত থেকে বলা যায় যে, $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ যদি তিনটি পারস্পরিক অভিলম্ব অক্ষ বরাবর বেস্ ভেক্টর হয় তবে, $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ অথবা, যে কোনো একক ভেক্টরের বর্গ 1-এর সমান।

(ঙ) যেহেতু $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ পরস্পরের অভিলম্ব তাই (ক) অনুসিদ্ধান্ত হতে লেখা যায় $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$ অথবা, যে কোনো দুটি একক ভেক্টরের স্কেলার গুণফল শূন্য।

Examples : (1) α-এর কি মানের জন্য ভেক্টর $\vec{A} = \alpha\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং ভেক্টর $\vec{B} = 2\alpha\hat{i} + \alpha\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পরের লম্ব হবে ? [C.U. 2001]

উঃ $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর পরস্পরের লম্ব হলে তাদের স্কেলার গুণফল শূন্য হয়। $\therefore \vec{A}.\vec{B} = 0$

অথবা, $(\alpha\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(2\alpha\hat{i} + \alpha\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$

অথবা, $2\alpha^2(\hat{i}.\hat{i}) - 2\alpha(\hat{j}.\hat{j}) - 4(\hat{k}.\hat{k}) = 0$ [$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} =$ ইত্যাদি $= 0$]

অথবা, $2\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0$

অথবা, $(\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$

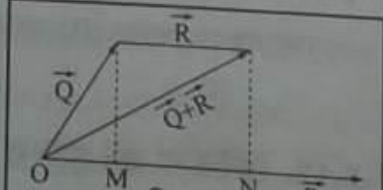
অথবা, $\alpha = 2$ অথবা -1.

(2) x-এর কোন্ মানের জন্য ভেক্টরদ্বয় $\vec{A} = \hat{i} + x\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ পরস্পরের অভিলম্ব হবে ? [C.U. 2007] [Ans. $x = 1$]

উঃ 1 নং অংক অনুসরণ কর।

2.11. স্কেলার গুণফল বণ্টন নিয়ম মেনে চলে (Scalar product obeys distributive law) :

ধরা যাক, $\vec{P}$ ভেক্টরের উপর $\vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ ভেক্টরের প্রক্ষেপ (projection) যথাক্রমে OM এবং MN [চিত্র 2.19]। আবার, $\vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ ভেক্টরের লব্ধি $(\vec{Q} + \vec{R})$। $\vec{P}$ ভেক্টরের উপর এই লব্ধির প্রক্ষেপ ON।



চিত্র 2.19

এখন, ভেক্টর $\vec{P}$ এবং লব্ধি ভেক্টর $(\vec{Q} + \vec{R})$ এর স্কেলার গুণফল $= \vec{P}.(\vec{Q} + \vec{R})$

$= \vec{P}.(\vec{Q} + \vec{R})$ এর প্রক্ষেপ

$= \vec{P} \times ON = \vec{P}(OM + MN) = \vec{P}.OM + \vec{P}.MN$

এখানে $A_x = 5x + y$; $A_y = 1 - 2xyz$; $A_z = 3xz$

$\therefore$ Curl $\vec{A}$ =

$$\hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(3xz)-\frac{\partial}{\partial z}(1-2xyz)\right]+\hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(5x+y)-\frac{\partial}{\partial x}(3xz)\right]+\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(1-2xyz)-\frac{\partial}{\partial y}(5x+y)\right]$$

$$= \hat{i}[0-(-2xy)]+\hat{j}[0-3z]+\hat{k}[-2yz-1]$$

$$= \hat{i}\,(2xy) - \hat{j}\,(3z) - \hat{k}\,(2yz+1)$$

এখন, (1,1,1) বিন্দুতে curl $\vec{A} = \hat{i}\,(2.1.1) - \hat{j}\,(3.1) - \hat{k}\,(2.1.1+1)$ $[\because x = y = z = 1]$

$$= 2\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}.$$

(3) $\phi(x, y, z)$ x, y, z স্থানাঙ্কের একটি স্কেলার অপেক্ষক হলে, প্রমাণ কর $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0.$ **[C.U. 2001]**

উঃ $\vec{\nabla}\phi = \hat{i}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{j}.\dfrac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{k}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$

$$\therefore \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

ডিটারমিন্যান্ট আকারে লেখা যায়, $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}.\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}.\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}.\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$
$$= 0$$

(4) $\vec{r}$ একটি স্থান-ভেক্টর হলে প্রমাণ কর যে $\vec{\nabla}\times\vec{r} = 0.$ **[N.B.U. 2005]**

উঃ $\vec{\nabla}\times\vec{r} = \text{curl}\,\vec{r} = \left(\hat{i}\dfrac{\delta}{\delta x}+\hat{j}\dfrac{\delta}{\delta y}+\hat{k}\dfrac{\delta}{\delta z}\right)\times(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)$

$$= \hat{k}\frac{\delta y}{\delta x}-\hat{j}\frac{\delta z}{\delta x}-\hat{k}\frac{\delta x}{\delta y}+\hat{i}\frac{\delta z}{\delta y}+\hat{j}\frac{\delta x}{\delta z}-\hat{i}\frac{\delta y}{\delta z}$$

$$= 0\left[\because \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\delta x}{\delta y}=\text{.........}\right]$$

2.18. ভেক্টরের সমাকল (Integration of vector) :

(i) রেখা সমাকল (Line integral) : $\vec{A}$ ভেক্টরের ক্ষেত্রে PQ বক্ররেখা বরাবর P বিন্দু থেকে Q বিন্দু পর্যন্ত ভেক্টরের সরণ বিবেচনা করা যাক। মনে কর, সমগ্র বক্ররেখাকে dl_1, dl_2 ইত্যাদি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র রেখাংশে বিভক্ত করা হল [চিত্র 2.34]। আরও মনে কর যে $\vec{A}$ ভেক্টর $\vec{dl}$-এর সঙ্গে θ কোণে আনত এবং বক্ররেখা বরাবর এর

(7) প্রমাণ কর যে ঘূর্ণায়মান কোনো দৃঢ়বস্তুর একটি কণার রৈখিক বেগের কার্ল বস্তুর কৌণিক গতিবেগের দ্বিগুণ। [C.U. 2004]

উঃ কণার রৈখিক $\vec{v}$ এবং দৃঢ় বস্তুর কৌণিক বেগ $\vec{\omega}$ হলে, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ যেখানে $\vec{r}$ = কোনো স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে ঐ কণার স্থান ভেক্টর। বলা বাহুল্য, $\vec{v}$ ভেক্টর একটি বিন্দু অপেক্ষক কিন্তু $\vec{\omega}$ একটি স্থির ভেক্টর।

এখন, $\frac{1}{2}\,\text{curl}\,\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{v})$

$$= \frac{1}{2}[\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \qquad [\vec{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \{\hat{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \hat{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \hat{k}(\omega_x y - \omega_y x)\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\omega_y z - \omega_z y), & (\omega_z x - \omega_x z), & (\omega_x y - \omega_y x) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,\omega_x + \hat{j}\,\omega_y + \hat{k}\,\omega_z = \vec{\omega}$$

$$\therefore \text{curl}\,\vec{v} = 2\vec{\omega}$$

(8) $\vec{\omega}$ একটি স্থির ভেক্টর এবং $\vec{r}$ অবস্থান-ভেক্টর হলে দেওয়া আছে যে, $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$।

প্রমাণ কর $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

[C.U. 2001]

উঃ $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\omega} \times \vec{r})$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot [\hat{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \hat{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \hat{k}(\omega_x y - \omega_y x)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\omega_y z - \omega_z y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega_z x - \omega_x z) + \frac{\partial}{\partial z}(\omega_x y - \omega_y x)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0.$$

(9) দেখাও যে $\oint_S \vec{r} \cdot \vec{dS} = 3V$ যেখানে বদ্ধক্ষেত্র S দ্বারা আবদ্ধ আয়তন V।

উঃ $\vec{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z$ [C.U. 2005 ; Burd. U. 2002]

গসের ডাইভারজেন্স উপপাদ্য অনুযায়ী $\oint_S \vec{r} \cdot \vec{dS} = \oint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})\,dV$

$$\therefore \oint_S \vec{r}\,.\,\vec{dS} = \left[\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial y}\right).(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)\right]dV$$

$$= \oint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dx.\, dy.\, dz.$$

$$= \oint_V (1 + 1 + 1)\, dV$$

$$= 3\oint_V dV = 3V.$$

END